

舊色園主辦荃葵青及離島區小學天文及數學比賽 (2024-2025) 短答題題解

1. 2^{2025} 的個位數字是多少？

我們不難發現，2 的冪的個位數字是具有循環性的，每 4 個以 2、4、8、6 為一個循環。
注意到 2025 除以 4 的餘數為 1，因此 2^{2025} 的個位數字與 2^1 的個位數字相同，則所求個位數字為 2。

2. 已知對任何實數 a 及 b ， $a \otimes b = a + b - ab$ 。
例如 $2 \otimes 2 = 2 + 2 - 2 \times 2 = 0$ 。
求 $((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4 \otimes 5$ 的值。

$$\begin{aligned} 1 \otimes 2 &= 1 + 2 - (1)(2) \\ &= 1 \\ (1 \otimes 2) \otimes 3 &= 1 \otimes 3 \\ &= 1 + 3 - (1)(3) \\ &= 1 \\ ((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4 &= 1 \otimes 4 \\ &= 1 + 4 - (1)(4) \\ &= 1 \\ (((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4) \otimes 5 &= 1 \otimes 5 \\ &= 1 + 5 - (1)(5) \\ &= 1 \end{aligned}$$

註：
注意到 $a \otimes b = a + b - ab = 1 - (ab - a - b + 1) = 1 - (a-1)(b-1)$ 。
由此可見 $1 \otimes b = 1 - (1-1)(b-1) = 1$ ，所以原式的值須為 1。

3. 有四個正整數 3，5，8 及 9，每個數字只能用一次，組成兩個兩位數。求這兩個兩位數之差的最小可能值。

要使組成的兩個兩位數之差最小，兩個兩位數的十位之差應為最小。因此，該兩個兩位數的十位分別應為 8 及 9。
由此所組成的兩位數，可以是 (83, 95) 或 (85, 93)。後者之差較小，可見組成的兩位數之差最小可能值是 $93 - 85 = 8$ 。

4. 若質數 A 及 B 滿足 $7A+5B=169$ ，求 $A+B$ 的值。

已知 $7A$ 和 $5B$ 的和是奇數，因此該兩數當中必有一個偶數及一個奇數。

- 若 $7A$ 為偶數，則 A 必為偶數。已知 A 是質數，因此 $A=2$ 。

$$7A+5B=169$$

$$7(2)+5B=169$$

$$5B=155$$

$$B=31$$

此情況下 B 是質數，因此此情況成立。

- 若 $5B$ 為偶數，則 B 必為偶數。已知 B 是質數，因此 $B=2$ 。

$$7A+5B=169$$

$$7A+5(2)=169$$

$$7A=159$$

$$A=\frac{159}{7}$$

此情況下 A 不是整數，因此此情況不成立。

所以 $A+B$ 的值為 $2+31=33$ 。

5. 已知對所有正整數 n , $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

(a) 求 $2+4+6+\cdots+100$ 的值。

(b) 求 $1+3+5+\cdots+99$ 的值。

(a)

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+100 &= 2(1+2+3+\cdots+50) \\ &= 2\left[\frac{50(50+1)}{2}\right] \\ &= 2\,550\end{aligned}$$

(b) 方法 1

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+99 &= (2-1)+(4-1)+(6-1)+\cdots+(100-1) \\ &= (2+4+6+\cdots+100) - \frac{100}{2} \\ &= 2\,550 - 50 \\ &= 2\,500\end{aligned}$$

方法 2

若讀者懂得等差數列求和公式，可以注意到此為一項數為 50 的等差數列，套用求和公式即可求解：

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+99 &= \frac{(1+99)(50)}{2} \\ &= 2\,500\end{aligned}$$

6. 把正整數依次排成下列的數陣，請問數字 620 在第幾行及第幾列？

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列	...
第 1 行	1	4	9	16	...	
第 2 行	2	3	8	15	...	
第 3 行	5	6	7	14	...	
第 4 行	10	11	12	13	...	
第 5 行	
...						

我們不難發現第 x 列第一行的數字是 x^2 。

已知 $25 \times 25 = 625$ ，所以 625 在第 25 列第 1 行。

我們也不難發現，從第 25 列第 1 行的 625 下移 5 格就是 620。

因此，620 在第 6 行及第 25 列。

7. 2025 的因數共有多少個？

注意到 2025 的質因數連乘式為 $2025 = 3^4 \times 5^2$ 。

因此，2025 的因數皆為 $3^a \times 5^b$ 的樣式，其中 a 、 b 均為整數，而且 $0 \leq a \leq 4$ 及 $0 \leq b \leq 2$ 。

要選擇 2025 的因數，可以選擇 a 和 b 的可能值，其中 a 有 5 個選擇、 b 則有 3 個選擇。

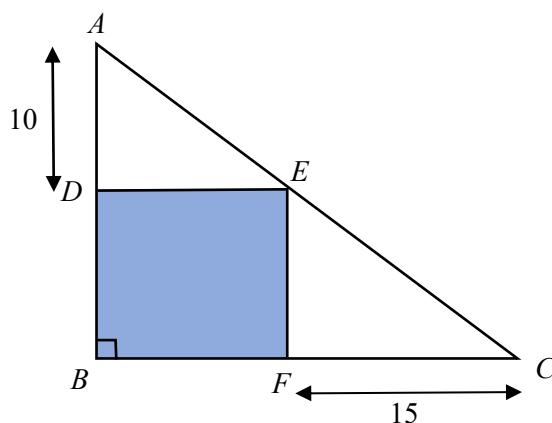
所以 2025 的因數共有 $5 \times 3 = 15$ 個。

8. 在一個平面上畫 30 條直線，最多可以把平面分成多少個部份？

在一個平面上畫上 n 條直線，最多可以把平面分成 $\left[\frac{n(n+1)}{2} + 1 \right]$ 個部份。

$$\begin{aligned} \text{所求部份數目} &= \frac{30(30+1)}{2} + 1 \\ &= 466 \text{ 個} \end{aligned}$$

- 9.



在圖中， ABC 為一直角三角形， D 、 E 及 F 分別為 AB 、 AC 及 BC 上的點，使 $BDEF$ 為一長方形。若 $AD=10$ 及 $CF=15$ ，求長方形 $BDEF$ 的面積。

設 $DE=x$ 及 $EF=y$ 。

注意到長方形 $BDEF$ 的面積是 xy 。

另外，注意到三角形 EFC 及 ADE 相似，可得

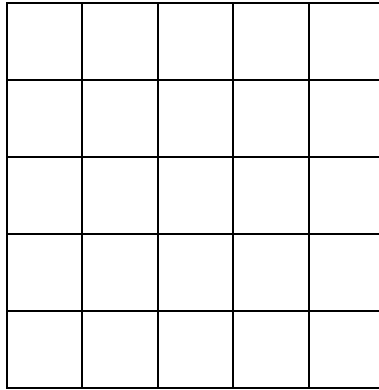
$$\frac{AD}{EF} = \frac{DE}{FC}$$

$$\frac{10}{y} = \frac{x}{15}$$

$$xy = 150$$

因此，長方形 $BDEF$ 的面積是 150。

10. 下圖由 25 個小正方形砌成。



- (a) 圖中共有多少個正方形？
(b) 圖中共有多少個非正方形的長方形？

- (a) 由 1 個小正方形砌成的正方形，共有 $5 \times 5 = 25$ 個。
由 4 個小正方形砌成的正方形（邊長為 2），共有 $4 \times 4 = 16$ 個。
由 9 個小正方形砌成的正方形（邊長為 3），共有 $3 \times 3 = 9$ 個。
由 16 個小正方形砌成的正方形（邊長為 4），共有 $2 \times 2 = 4$ 個。
由 25 個小正方形砌成的正方形（邊長為 5），共有 1 個。
因此，圖中共有正方形 $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ 個。
- (b) 從圖中 6 條豎線中任選其二、及 6 條橫線中任選其二，均可形成一個長方形。
因此，圖中共有長方形 $\frac{6 \times 5}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 225$ 個。
(或 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 225$ 個)
由此，圖中共有非正方形的長方形 $225 - 55 = 170$ 個。